

**В.А.ВАНИН**, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»;

**А.А.ГРИГОРЬЕВ**, асп., НТУ «ХПИ»;

**А.И.ДЕРИЕНКО**, канд.техн.наук, доц., КГУ им. М.Остроградского,  
Кременчуг

## ВНУТРЕННИЕ СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ПЕРЕНОСА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ

За допомогою лінійної теорії пружності та потенціалів Герца вивчаються експоненціальні хвилі переносу, що розповсюджуються по циліндричному стрижню. Підтверджені та уточнені результати застосування класичної теорії тонких стрижнів. Отримані хвилі переносу імпульсу, що не описуються класичною теорією.

At use of the linear theory of elasticity and Hertz potentials the exponential waves of translation extended on a cylindrical core are investigated. The results of the use of the classical theory of thin cores are confirmed and specified. The waves of the impulse transfer which are not described by the classical theory are gained.

**Введение и постановка задачи.** Исследуются новые аспекты актуальной проблемы генерирования уединенных гармонических волн переноса (фононов), движущихся в активной упругой среде по траекториям винтовой формы (рис. 1). Считается, что винтовой фонон (механический аналог фотона) представляет собой устойчивый волновой пакет, в котором присутствуют связанные бегущие волны других типов (солитон, экспоненциальные волны).

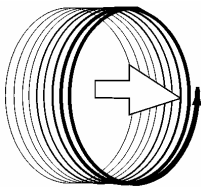


Рисунок 1 – Форма траектории винтового фонона

В работах [1,2], где исследуются связанные нелинейные колебания винтового цилиндрического стержня, использована обычная для динамики стержней гипотеза о равномерной деформации поперечного сечения (смотри, например, монографию [3]). Однако когда протяженность волны становится соизмеримой с диаметром стержня, эта гипотеза требует обоснования. Кроме того, здесь, априори, могут наблюдаться колебания, сопровождающиеся сложной формой деформации сечения (рис. 2, 3). Известным аналогом для этих процессов являются колебания электромагнитного поля внутри полого цилиндрического волновода [4]. Такие колебания далее будем называть **зональными**. В данной работе будет показано, что зональные колебания, как правило, являются **внутренними колебаниями** стержня, поскольку они сводятся к перераспределению энергии внутри сечения и не влияют на средние (по сечению) геометрические и силовые характеристики процесса колебаний (такие, как линейные и угловые скорости, силы и моменты, рассматриваемые в работах [1-3]). Но, как оказалось, из этого правила существуют исключения, и эти исключения важны для теории связанных колебаний. Чтобы пояснить их значение, обратимся к рис. 4, где сплошными линиями изображены решения характеристического (другое название дисперсионного) уравнения для модели винтового

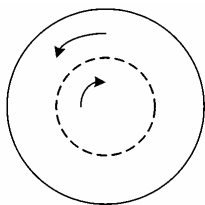


Рисунок 2 – Радиальная зональная деформация сечения

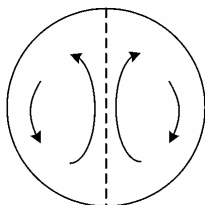


Рисунок 3 – Секторальная зональная деформация сечения

стержня из работы [1]. Каждой точке на графике соответствует некоторая простая волна вида

$$\vec{X} \cdot \exp(i(\omega t - \lambda z)),$$

где  $\vec{X}$  – ее форма;  $\lambda$  – волновое число;  $\omega$  – частота, причем точкам из первого квадранта отвечают гармонические волны, второго квадранта – затухающие волны и третьего квадранта – экспоненциальные волны. Гармонические и экспоненциальные волны являются волнами переноса. Наклонная пунктирная прямая пересекает эти ветви в четырех точках, и соответствующие этим точкам волны, которые имеют одинаковые фазовые скорости, могут быть объединены в **волновой пакет**.

Единица длины отвечает радиусу кривизны стержня  $R_1$ , единица времени – промежутку распространения волны поперечной деформации по стержню длины  $R_1$ .

Устойчивость волнового пакета и диссипация его энергии во многом определяется теми условиями, которые возникают на фронте волны, в частности, требованиями к непрерывности и гладкости динамических характеристик, и чем больше волн объединяются в пакет, тем проще обеспечить эту гладкость.

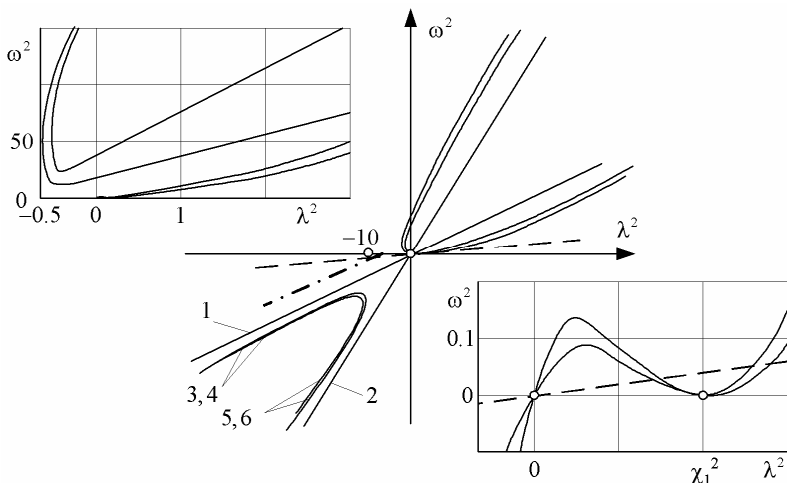


Рисунок 4 – Решения дисперсионного уравнения (формы деформации сечения: 1 – кручение; 2 – осевое сжатие; 3, 4 – поперечный сдвиг; 5, 6 – изгиб, в двух плоскостях;  $\chi_1$  – относительная кривизна стержня;  $\chi_1^{-1}$  – индекс винтового стержня,  $\chi_1 = R_1/R$ )

В связи с этим была поставлена следующая задача: найти экспоненциальные волны переноса, которые не описываются моделью работы [1], но могли бы использоваться при образовании волновых пакетов. Соответствующие

этим волнам точки на рис. 4 отмечены штрих-пунктиром; как видно, они расположены в области волн малой протяженности, где гипотеза о равномерном деформировании сечения может не выполняться.

**Выбор математической модели.** Крутильные и продольные колебания прямого стержня в рамках гипотезы о равномерном деформировании сечения описываются волновыми уравнениями, имеющими следующие факторизации (рис. 5):

$$\begin{cases} \rho I_3 \ddot{\gamma}_3 = \partial M_3 / \partial z \\ c\gamma_3 M_3 = \partial x_3 / \partial z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \rho S \ddot{x}_3 = \partial Q_3 / \partial z \\ cx_3 Q_3 = \partial x_3 / \partial z \end{cases} \quad (1)$$

остальные характеристики и участвуют в поперечных (изгибно-сдвиговых) колебаниях прямого бруса, происходящих в 2-ух перпендикулярных плоскостях:

$$\begin{cases} \rho S \ddot{x}_1 = \partial Q_1 / \partial z \\ \rho I_2 \ddot{\gamma}_2 = \partial M_2 / \partial z - Q_1 \\ cx_1 Q_1 = \partial x_1 / \partial z + \gamma_2 \\ c\gamma_2 M_2 = \partial \gamma_2 / \partial z \end{cases} \quad \begin{cases} \rho I_1 \ddot{\gamma}_1 = \partial M_1 / \partial z + Q_2 \\ \rho S \ddot{x}_2 = \partial Q_2 / \partial z \\ c\gamma_1 M_1 = \partial \gamma_1 / \partial z \\ cx_2 Q_2 = \partial x_2 / \partial z - \gamma_1 \end{cases} \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2)  $\rho$  обозначает плотность материала,  $S$  – площадь сечения,  $I_1, I_2, I_3$  – его моменты инерции относительно соответствующих осей;  $cx_1 \dots c\gamma_3$  – коэффициенты податливости сечения при поперечном сдвиге, сжатии, кручении или изгибе; конкретные формулы для этих коэффициентов в зависимости от формы сечения можно найти в работах [1, 5].

Для систем (1), (2) были составлены характеристические уравнения, а их решения (рис. 6) сопоставлены с представленными на рис. 4. Оказалось, что если стержень имеет круглое сечение радиуса  $R$ , то при условии  $|\lambda R| > \chi_1^{-1}$  в третьем квадранте решения дисперсионных уравнений для прямого и винтового стержня практически совпадают. Это означает, что кривизна и

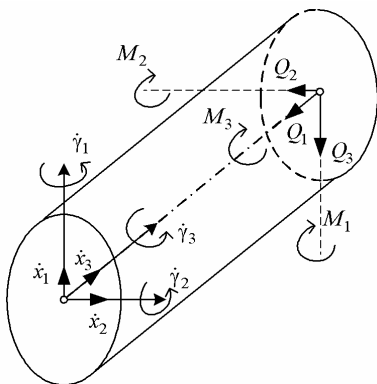


Рисунок 5 – Скорости смещения сечения прямого стержня и действующие в нем силы

кручение оси винтового стержня для исследуемых волн не играют существенной роли, и ими допустимо пренебречь.

Для решения поставленной задачи были использованы известные уравнения линейной теории упругости [4]. Запишем дифференциальное уравнение свободных колебаний для упругих смещений  $\vec{u}(r, \varphi, z, t)$  точек цилиндрического стержня, считая материал стержня однородным и изотропным:

$$\rho \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = K \cdot \text{grad div } \vec{u} - G \cdot \text{rot rot } \vec{u}, \quad (1)$$

где  $r, \varphi, z$  – цилиндрические координаты точки;  $t$  – время;  $K$  – модуль объем-

ного сжатия;  $K = 3\mu/(1-2\mu)G$ ;  $G$  – модуль сдвига,  $\mu$  – коэффициент Пуассона. Известно, что уравнение (1) имеет решение вида

$$\vec{u} = \text{rot } \vec{A} + \text{grad } \psi, \quad (2)$$

причем потенциалы  $\psi(r, \varphi, z, t)$  и  $\vec{A}(r, \varphi, z, t)$  удовлетворяют волновым уравнениям

$$a_{np}^{-2} \cdot \partial^2 \psi / \partial t^2 = \text{div grad } \psi, \quad (3)$$

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \vec{A} / \partial t^2 = \Delta[\vec{A}], \quad (4)$$

где  $\Delta[\vec{A}] = \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}$  – оператор Лапласа;  $a_{np} = \sqrt{K/\rho}$  – скорость звука для продольных колебаний;  $a_{non} = \sqrt{G/\rho}$  – скорость звука для поперечных колебаний.

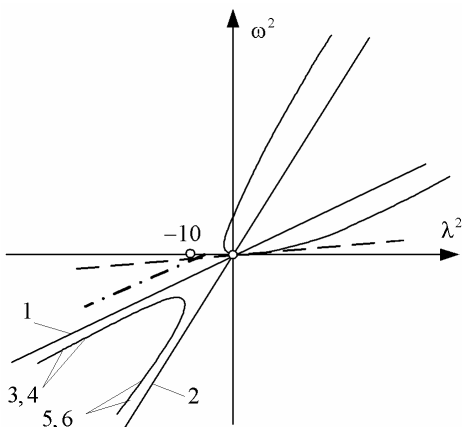


Рисунок 6 – Решения дисперсионного уравнения для классической модели прямого стержня (обозначения те же, что и на рис.4; принято  $R_1 = 1$ )

Заметим, что задача (4), (6), (7) фактически рассматривалась в [4], когда искали бегущие электромагнитные волны внутри цилиндрического волновода. Мы сможем воспользоваться полученным там решением, но нужно учесть три отличия новой задачи от известной:

- решение обязано удовлетворять дополнительному условию (5);
- решение может использовать не только векторный потенциал  $\vec{A}$ , но и скалярный потенциал  $\psi$ ;
- в отличие от электромагнитного поля, скалярный и векторный потенциалы в упругой среде имеют разные скорости распространения.

**Осесимметричные волны переноса для потенциалов.** Следуя методу, изложенному в [4] для волноводов, будем искать решение уравнений (3) и (4)

На внешней границе стержня (при  $r = R$ ) рассматривались стандартные для механики твердого тела условия равенства нулю нормального давления и скалывающих напряжений:

$$\text{def } \vec{u}_{rr} + \frac{\mu}{1-2\mu} \text{div } \vec{u} = 0, \quad (5)$$

$$\text{def } \vec{u}_{rz} = 0; \quad (6)$$

$$\text{def } \vec{u}_{r\varphi} = 0; \quad (7)$$

на оси стержня все напряжения должны быть ограничены.

Все преобразования проводились в криволинейных цилиндрических координатах; формулы для компонент тензора деформации, записанных в этих координатах, приведены, например, в [6].

в форме осесимметричных экспоненциальных волн переноса

$$\psi(r, z, t) = \Phi(r) \cdot \exp(\omega t - \lambda z) \quad \text{и} \quad \bar{A}_{1,2}(r, z, t) = \bar{\Phi}_{1,2}(r) \cdot \exp(\omega t - \lambda z),$$

где  $\omega t \leq \lambda z$ , а амплитудные функции векторных потенциалов имеют следующий вид:

$$\bar{\Phi}_1(r) = \{0, 0, \Pi_1(r)\}, \quad \bar{\Phi}_2(r) = \text{rot}\{0, 0, \Pi_2(r)\}.$$

Векторная функция  $\{0, 0, \Pi_2(r)\} \cdot \exp(\omega t - \lambda z)$ , как известно, в теории электромагнитных волн называется *бегущим потенциалом Герца*. Кроме того, следуя традиции, заложенной Дираком, величина  $\lambda < 0$  называется «*отрицательным волновым числом*», а величина  $\omega < 0$  – «*отрицательной частотой*». При таком выборе этих величин экспоненциальная волна движется со скоростью  $v = \omega/\lambda$  в положительном направлении оси  $z$  и очень быстро (с экспоненциальной скоростью) затухает по своей длине. Дирак, создавший волновую модель электрона, в последние годы жизни предлагал использовать экспоненциальные волны и «отрицательные частоты» для описания ядер движущихся элементарных частиц, но довести задуманное до логического конца не успел.

Тогда величины  $\lambda^2 > 0$ ,  $\omega^2 > 0$ , а функции  $\Phi(r)$ ,  $\Pi_{1,2}(r)$  должны удовлетворять уравнениям Бесселя нулевого порядка

$$\Phi'' + \Phi' / r + (\lambda^2 - \omega^2 / a_{np}^2) \Phi = 0, \quad \Pi_{1,2}'' + \Pi_{1,2}' / r + (\lambda^2 - \omega^2 / a_{np}^2) \Pi_{1,2} = 0,$$

и, с учетом ограниченности этих функций при  $r = 0$ , получаем, что

$$\Pi_{1,2}(r) = J_0(\beta_1 r), \quad \Phi(r) = J_0(\beta_2 r),$$

где  $\beta_1 = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2 / a_{np}^2}$ ,  $\beta_2 = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2 / a_{np}^2}$ .

Это означает, что смещение в волне переноса описывается формулой

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = C_1 \cdot \text{rot} \vec{A}_1 + C_2 \cdot \text{rot} \vec{A}_2 + C_3 \cdot \text{grad} \psi, \quad \text{то есть}$$

$$\vec{u} = [C_1 \{0; \beta_1 J_1(\beta_1 r); 0\} - C_2 \{\lambda \beta_1 J_1(\beta_1 r); 0; \beta_1^2 J_0(\beta_1 r)\} - C_3 \{\beta_2 J_1(\beta_2 r); 0; \lambda J_0(\beta_2 r)\}] e^{\omega t - \lambda z}, \quad (8)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  – некоторые константы, выбор которых подчинен удовлетворению граничных условий (5), (6), (7).

Анализ этих условий показывает, что волна  $\vec{u}_1$  и сумма волн  $\vec{u}_2 + \vec{u}_3$  в цилиндрическом стержне не связаны между собой, и могут распространяться отдельно. В результате мы приходим к частным случаям, анализируемым в следующих двух пунктах.

**Вращения поперечного сечения стержня.** Для волны

$$\vec{u}_1 = \{0; \beta_1 J_1(\beta_1 r); 0\} e^{\omega t - \lambda z}$$

условия (5), (6) не актуальны, а условие (7) после учета тождества

$$J_1'(\beta_1 r) \beta_1 - J_1(\beta_1 r) / r = -\beta_1 J_2(\beta_1 r)$$

приводит к уравнению  $J_2(\beta_1 R) = 0$ , то есть

$$\lambda^2 - \omega^2 / a_{np}^2 = v_{2,j}^2 / R^2,$$

где  $v_{2,j}$  –  $j$ -тый корень функции Бесселя  $J_2(x)$ .

При условии  $j = 0$  имеем вырожденный случай  $\beta_1 = 0$  и  $\Pi(r) \equiv 1$ , который

соответствует равномерному вращению сечения вокруг его оси, описываемому классической моделью стержня. На рис. 7 этому вращению соответствует прямая линия, проходящая через начало координат. При  $j = 1$  получаем простейшее зональное вращение стержня, соответствующее рис. 2; на рис. 7 ему отвечает смещенная прямая линия. Если  $j > 0$ , то число «колец», имеющих разное направление вращения, становится большим двух (оно равняется  $j + 1$ ).

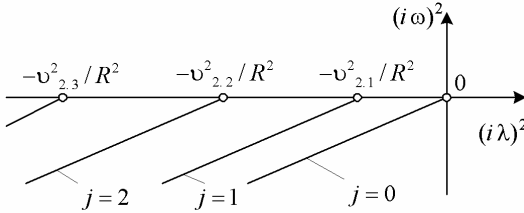


Рисунок 7 – Решения дисперсионного уравнения для равномерного ( $j = 0$ ) и зонального ( $j > 0$ ) вращения сечения стержня

Характерным является то, что в силу известного тождества  $\int_0^{v_{2,j}} J_1(r) r dr = 0$  любое зональное вращение имеет момент количества движения, равный 0, то есть соответствующее колебание стержня является внутренним и использоваться при образовании волнового пакета не может. Независимое обоснование этого факта можно найти в общей теории соответствующей краевой задачи, изложенной, например, в [4]: формы колебаний, отвечающие разным собственным частотам, ортогональны, и поскольку среди этих форм содержится равномерное вращение, то для остальных форм среднее по сечению вращение обязано равняться 0.

### Продольные осесимметричные деформации стержня. Для волны

$$\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = -\{C_2 \lambda \beta_1 J_1(\beta_1 r) + C_3 \beta_2 J_1(\beta_2 r); \quad 0; \quad C_2 \beta_1^2 J_0(\beta_1 r) + C_3 \lambda J_0(\beta_2 r)\} e^{\lambda z - i\omega t}$$

условие (7) не является актуальным, а выполнение условий (5), (6) эквивалентно следующей однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} (-\lambda \beta_1^2 J_1'(\beta_1 R)) C_2 + (-\beta_2^2 J_1'(\beta_2 R) + a_{np}^{-2} \cdot (\mu / (1 - 2\mu)) J_0(\beta_2 R)) C_3 = 0; \\ (\lambda^2 + \beta_1^2) \beta_1 J_1(\beta_1 R) \cdot C_2 + 2\lambda \beta_2 J_1(\beta_2 R) \cdot C_3 = 0, \end{cases}$$

которая имеет нетривиальные решения в случае равенства нулю ее определителя:

$$\Delta(\lambda, \omega) = \det \begin{pmatrix} -\lambda \beta_1 J_1'(\beta_1 R) & -\beta_2^2 J_1'(\beta_2 R) + a_{np}^{-2} \cdot (\mu / (1 - 2\mu)) J_0(\beta_2 R) \\ (\lambda^2 + \beta_1^2) \beta_1 J_1(\beta_1 R) & 2\lambda \beta_2 J_1(\beta_2 R) \end{pmatrix} = 0, \quad (9)$$

где, как и ранее,  $\beta_1 = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2 / a_{non}^2}$ ,  $\beta_2 = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2 / a_{np}^2}$ .

Заметим, что определитель (9) остается вещественным и в тех случаях, когда число  $\beta_1$  или оба числа  $\beta_{1,2}$  становятся мнимыми; при этом в определителе используются функции Бесселя с мнимым аргументом, а в решении (8) – модифицированные функции Бесселя.

Уравнение (9) решалось численно, для чего частота  $\omega$  фиксировалась на постоянном уровне  $\omega = \omega_0$ , а волновое число  $\lambda$  варьировалось. Решения показаны на рис. 8. Оказалось, что часть этих решений близки к тем, которые по-

лучаются в рамках классической модели стержня, а именно при малых волновых числах  $\lambda$  (участок 1' на кривой 1) они практически точно ложатся на наклонную прямую  $\omega^2 = \lambda^2 \cdot (E/\rho)$ , отвечающую равномерной продольной деформации стержня, где  $E = G \cdot 2 \cdot (1 + \mu)$  – модуль упругости стержня. Но для коротких волн наклон кривой 1 определяется не модулем  $E$ , а модулем  $K$  объемного сжатия.

В области коротких экспоненциальных волн кроме наклонной линии появляются ветви гиперболы с асимптотой  $\omega^2 = \lambda^2 \cdot (E/\rho)$  и другие решения (рис. 8).

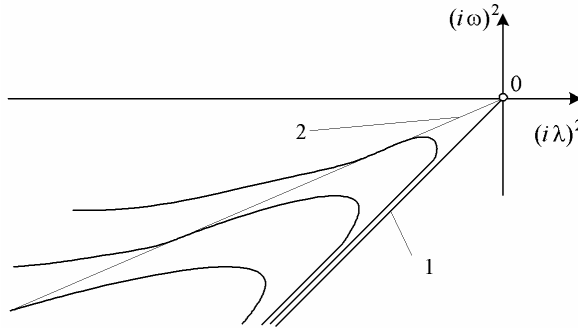


Рисунок 8 – Решения дисперсионного уравнения для равномерной (участок 1' кривой 1) и неравномерной продольной деформации стержня. Пунктирная прямая 2 соединяет точки перегиба графиков и удовлетворяет уравнению  $\omega^2 = a_{non}^2 \cdot \lambda^2$

**Секторальные волны переноса для потенциалов.** Пусть функции  $\Phi(r)$ ,  $\Pi_{1,2}(r)$  удовлетворяют уравнениям Бесселя  $m$ -го порядка

$$\Phi'' + \Phi' / r + (\lambda^2 - \omega^2 / a_{np}^2 - m^2 / r^2) \Phi = 0,$$

$$\Pi_{1,2}'' + \Pi_{1,2}' / r + (\lambda^2 - \omega^2 / a_{non}^2 - m^2 / r^2) \Pi_{1,2} = 0,$$

где  $m$  – целое положительное число. Тогда  $\Pi_{1,2}(r) = J_m(\beta_1 r)$ ,  $\Phi(r) = J_m(\beta_2 r)$ , и выражения

$$\psi(r, \varphi, z, t) = \Phi(r) \cdot \exp(\omega t - \lambda z + i m \varphi), \quad \bar{A}_{1,2}(r, z, t) = \bar{\Phi}_{1,2}(r) \cdot \exp(\omega t - \lambda z + i m \varphi), \quad (10)$$

где  $\bar{\Phi}_1(r) = \{0, 0, \Pi_1(r)\}$ ,  $\bar{\Phi}_2(r) = \text{rot}\{0, 0, \Pi_2(r)\}$ , также являются скалярными и векторными потенциалами для искомой волны переноса.

Целям нашего исследования может отвечать только случай  $m = 1$ , который, например, соответствует повороту сечения вокруг его диаметра; при  $m \geq 2$  колебания стержня по понятным причинам окажутся внутренними.

**Волны поперечного сдвига сечения.** Для сокращения записей далее будем считать, что радиус поперечного сечения  $R = 1$ . Учтем, что каждому из комплексных потенциалов (10) отвечает пара вещественных потенциалов, например,

$\psi(r, \varphi, z, t) = \Phi(r) \cdot \exp(\omega t - \lambda z) \cdot \cos \varphi$  и  $\psi(r, \varphi, z, t) = \Phi(r) \cdot \exp(\omega t - \lambda z) \cdot \sin \varphi$ , а для выполнения условий (5)-(7) необходимо, чтобы каждая компонента поля

смещений  $\vec{u}$  содержала только одну тригонометрическую функцию, что накладывает ограничения на выбор потенциалов. Поэтому, не умаляя общности, образуем сумму

$$\vec{u} = C_1 \vec{u}_1 + C_2 \vec{u}_2 + C_3 \vec{u}_3$$

следующих трех волн переноса:

$$\vec{u}_1 = \text{rot}\{0; 0; J_1(\beta_1 r) \sin \varphi \cdot e^{\omega t - \lambda z}\} = \{(J_1(\beta_1 r)/r) \cos \varphi; -\beta_1 J_1'(\beta_1 r) \sin \varphi; 0\} e^{\omega t - \lambda z},$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_2 &= \text{rot rot}\{0; 0; J_1(\beta_1 r) \cos \varphi \cdot e^{\omega t - \lambda z}\} = \\ &= \{(-\lambda \beta_1 J_1'(\beta_1 r)) \cos \varphi; \lambda (J_1(\beta_1 r)/r) \sin \varphi; \beta_1^2 J_1(\beta_1 r) \cos \varphi\} e^{\omega t - \lambda z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_3 &= \text{grad}(J_1(\beta_2 r) \cos \varphi \cdot e^{\omega t - \lambda z}) = \\ &= \{\beta_2 J_1'(\beta_2 r) \cos \varphi; -(J_1(\beta_2 r)/r) \sin \varphi; -\lambda J_1(\beta_2 r) \cos \varphi\} e^{\omega t - \lambda z}. \end{aligned}$$

В данном случае граничные условия (5)-(7) связывают три волны, и выполнение этих условий возможно при равенстве нулю соответствующего определителя системы:

$$\Delta(\lambda, \omega) = \det \begin{pmatrix} -J_2(\beta_1) & -\lambda \beta_1 J_1''(\beta_1) & \beta_2^2 J_1''(\beta_2) + \frac{\mu}{1-2\mu} \frac{\omega^2}{a_{np}^2} J_1(\beta_2) \\ -\lambda J_1(\beta_1)/\beta_1 & (\lambda^2 + \beta_1^2) J_1'(\beta_1) & -2\lambda \beta_2 J_1'(\beta_2) \\ \beta_1 J_1(\beta_1) - 2J_2(\beta_1) & -2\lambda J_2(\beta_1) & 2\beta_2 J_2(\beta_2) \end{pmatrix} = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) решалось тем же способом, что и уравнение (9). Оказалось, что его корни образуют сетку из смещенных влево линий, показанных на рис. 9. Наклон этих линий близок к наклону асимптоты  $\omega^2 = \lambda^2 \cdot (G/\rho)$ , соответствующей колебаниям стержня при чистом сдвиге, а величина смещения в основном определяется расположением корней уравнения  $J_2'(x) = 0$ , но, как и наклон, корректируется в зависимости от величины коэффициента Пуассона. Наибольший интерес для целей нашего исследования представляет первая линия этого семейства, определяемая равенством:

$$\omega^2 = (\lambda^2 - \lambda_0^2) \cdot (G/\rho)(1 + \mu/3), \quad (12)$$

где  $\lambda_0 R = -2,65 - 0,5\mu$ . Анализ соответствующих деформаций показал, центр сечения смещается по направлению полярного угла  $\varphi = 0$  на величину

$$u_0 = 0,5(C_1 - C_2 \lambda) \beta_1 + 0,5 C_3 \beta_2,$$

а среднее смещение точек сечения в этом направлении пропорционально интегралу

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \iint_{r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi]} \vec{u}(r, \varphi, z, t) \cdot \{\cos \varphi, -\sin \varphi, 0\} r dr d\varphi = \\ &= \int_0^1 [(C_1 - C_2 \lambda)(J_1(\beta_1 r) + \beta_1 J_1'(\beta_1 r)) + C_3(J_1(\beta_2 r) + \beta_2 J_1'(\beta_2 r))] dr, \text{ то есть} \\ &u_{cp} = (C_1 - C_2 \lambda) J_1(\beta_1) + C_3 J_1(\beta_2), \end{aligned} \quad (13)$$



где коэффициенты  $C_{1,2,3}$  получены при решении однородной системы с определителем (11). Как следует из анализа этого решения, сумма (13) имеет тот же знак, что и  $u_0$ , и указанный сдвиг обладает ненулевым импульсом.

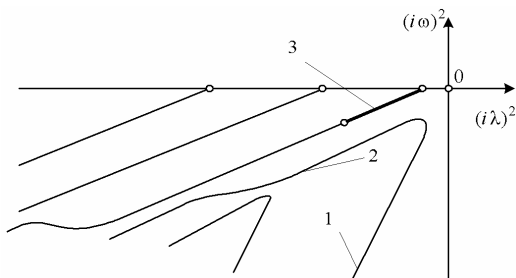


Рисунок 9 – Решения дисперсионного уравнения для случая  $m = 1$ .

Кривые 1, 2 отвечают равномерной изгибно-сдвиговой деформации (1 – преимущественного изгиба, 2 – преимущественно поперечного сдвига); прямая 3 – неравномерной деформации сдвига.

Кроме импульса эта деформация обладает незначительным моментом количества движения сечения вокруг оси  $\varphi = \pi/2$ ; указанная величина пропорциональна интегралу

$$\iint_{r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi]} [C_2 \beta_1^2 J_1(\beta_1 r) - C_3 \lambda J_1(\beta_2 r)] r^2 \cos^2 \varphi dr d\varphi = \pi [C_2 \beta_1 J_2(\beta_1) - C_3 \lambda J_2(\beta_2) / \beta_2].$$

Однако колебания изгибающего момента в цилиндрическом стержне при больших частотах отвечают условию  $\omega^2 = \lambda^2 \cdot (E/\rho)$ , и поскольку модуль  $E$  в  $2(1 + \mu)$  раза больше модуля  $G$ , то становится ясно, что влияние качания сечения на фазовую скорость данной волны мало ( $\mu / (6(1 + \mu)) \approx 0,05$ ), и этой формой деформации здесь допустимо пренебречь. Следовательно, исследуемые волны описывают деформации неравномерного поперечного сдвига сечения.

#### Форма неравномерной деформации сечения для частного случая.

Рассмотрим винтовой стержень, имеющий малую относительную кривизну; пусть, например, его индекс  $\chi_1^{-1} = 10$ . В волновом пакете винтового фонона обязана содержаться длинная гармоническая волна, поэтому пунктирная линия на рис. 4 оказывается близка к касательной, проведенной к нижней ветви дисперсионного уравнения в начале координат. Это означает, что скорость фонона  $v$  составляет малую долю скорости  $a_{non}$ :

$$v \approx (\chi_1 / \sqrt{1 + \mu}) a_{non} \approx 0,08 a_{non},$$

а для параметров волны неравномерного поперечного сдвига с учетом (12) выполняются следующие соотношения

$$\omega^2 \ll a_{non}^2 \lambda^2, \quad \beta_{1,2} \approx -\lambda \approx -\lambda_0. \quad (14)$$

Наличие таких соотношений упрощает анализ полученного решения. В

частности, имеет место зависимость

$$u_{cp} \approx (2J_1(\lambda_0)/\lambda_0)u_0 \approx (1/3)u_0.$$

На рис. 10 приведены графики поперечного сдвига для точек сечения. Смещение точек соответствует показанному на рис. 3.

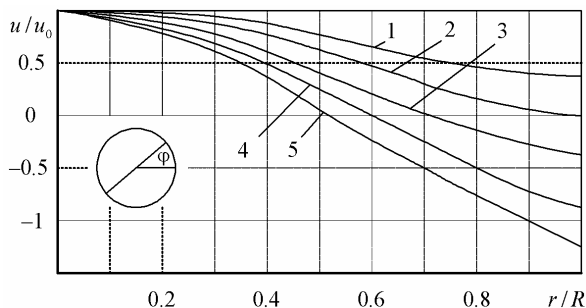


Рисунок 10 – Величина поперечного сдвига для точек сечения стержня: кривая 1 отвечает значению угла  $\varphi = 0^\circ$ , кривая 2 –  $\varphi = \pm 30^\circ$ , кривая 3 –  $\varphi = \pm 45^\circ$ , кривая 4 –  $\varphi = \pm 60^\circ$ , кривая 5 –  $\varphi = \pm 90^\circ$

### Выводы.

При использовании трехмерной модели линейной теории упругости решена задача о распространении экспоненциальных волн переноса по цилиндрическому стержню. Решения используют бегущие скалярные и векторные потенциалы, в том числе потенциалы Герца, связанные граничными условиями на боковой поверхности стержня.

Полученные решения подтвердили, а в случае коротких волн – уточнили, результаты применения для этой же задачи классической теории тонких стержней, использующей гипотезу о равномерном деформировании сечения.

Кроме известных решений получены волны переноса импульса (поперечного неравномерного сдвига сечения), не описываемые классической теорией.

**Список литературы:** 1. Лавинский В.И., Григорьев А.А. Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – 2008. – № 47. – С.92-104. 2. Асланян А.Г., Гулин А.В., Картышов С.В. Расчет собственных частот и форм колебаний цилиндрической пружины // Математическое моделирование. – Т. 2. – 1990. – № 8. – С. 21-30. 3. Светлицкий В.А., Нарайкин О.С.. Упругие элементы машин. – М.: Машиностроение, 1989. – 264 с. 4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с. 5. Ванин В.А., Григорьев А.А. Солитоны Рассела в цилиндрической пружине // Вестник НТУ «ХПИ». Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – 2009. – № 30. – С. 20-30. 6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газов. – М.: Наука, 1978. – 736 с.

Поступила в редколлегию 04.11.2009